

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Un allineamento è ovviamente una antenna, e per esso valgono quindi tutte le definizioni di parametri sintetici già visti per le antenne (direttività, guadagno, altezza efficace, resistenza di irradiazione e di ingresso, ecc.).

In questo paragrafo ci occuperemo delle espressioni esplicite di tali parametri, limitatamente ad array per cui vale la (2).

Per quanto riguarda la altezza efficace, dalla stessa eq.(2) si deduce che la altezza efficace dell' array è il prodotto della altezza efficace del singolo elemento e del fattore di array.

Sempre dalla eq. (2) si può calcolare la potenza irradiata dall'array

$$P_i = \frac{1}{2} |I_A|^2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int |\underline{h}(\vartheta, \varphi)|^2 |F(\vartheta)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\zeta} \int_{Sfera} |\underline{E}(\vartheta, \varphi)|^2 r^2 d\Omega = \int_{Sfera} |\underline{S}(\vartheta, \varphi)| r^2 d\Omega$$

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Quindi la direttività in direzione  $\theta_0, \varphi_0$  è:

$$D(\vartheta_0, \varphi_0) = \frac{r^2 S_\infty(r, \vartheta_0, \varphi_0)}{\frac{1}{4\pi} P_i} = \frac{\frac{1}{2} |I_A|^2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} |h(\vartheta_0, \varphi_0)|^2 |F(\vartheta_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} P_i} \quad (26)$$

ed il guadagno

$$G(\vartheta_0, \varphi_0) = \eta D(\vartheta_0, \varphi_0)$$

essendo  $\eta$  l'efficienza dell'array

$$\eta = \frac{P_i}{P_i + P_d}$$

valutata tenendo conto della potenza irradiata  $P_i$  e di quella dissipata  $P_d$ .

Tuttavia il termine direttività, e di conseguenza guadagno, hanno, se riferiti ad un allineamento lineare, anche altri significati.

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Una seconda definizione di guadagno (o più precisamente di direttività) è quella relativa al periodo:

$$D_p(u_0) = \frac{|F(u_0)|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du} = \frac{|F(u_0)|^2}{\sum_{n=1}^N |a_n|^2} \quad (27)$$

dove  $F(u)$  è data dalla (4) e si è poi utilizzata nel denominatore la identità di Parseval, che afferma che "L'energia contenuta da una funzione in un periodo è uguale all'energia contenuta nel modulo quadro dei suoi coefficienti di Fourier":

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

La direttività sul periodo  $D_p$  consente di confrontare tra loro distribuzioni di eccitazioni diverse, ma essendo indipendente dalla spaziatura dell'array, non da informazioni sul vero guadagno dell'antenna (ovvero quello che va inserito, ad es., nella formula di Friis).

Una indicazione molto più accurata di tale guadagno è fornita dal guadagno del fattore di allineamento:

$$D_a(\vartheta_0) = \frac{|F(\vartheta_0)|^2}{\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\vartheta)|^2 \cos \vartheta d\vartheta} \quad (28)$$

dove  $F(\theta)$  è dato dalla (3).

L'integrale al denominatore della (28) è esteso a tutto l'insieme delle direzioni fisiche e rappresenta il valore medio del fattore di array nel periodo del visibile, mentre  $\cos\theta d\theta$  è l'elemento di area infinitesimo.

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Se eseguiamo la trasformazione di variabili  $u=\beta d \sin\theta$  la (28) si trasforma in

$$D_a(\theta_0) = \frac{|F(u_0)|^2}{\frac{1}{2\beta d} \int_{-\beta d}^{\beta d} |F(u)|^2 du} \quad (29)$$

in cui  $u_0=\beta d \sin\theta_0$ .

A differenza della (27), l'integrale al denominatore della definizione di  $D_a$  fa riferimento al solo visibile.

Quindi se la spaziatura è  $\lambda/2$ , allora  $D_a \equiv D_p$  (infatti in tal caso  $\beta d=\pi$ , ed il denominatore è lo stesso nei due casi), e quindi il massimo di  $D_a$  vale  $N$  qualunque sia la direzione  $\theta_0$  e lo ottengo per una distribuzione uniforme.

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Se la spaziatura  $d$  è maggiore di  $\lambda/2$ , allora il visibile è più grande del periodo, quindi l'integrale della media a denominatore in  $D_a$  è maggiore dell'integrale corrispondente in  $D_p$ , ma anche  $\beta d$  è maggiore di  $\pi$  e quindi a seconda della spaziatura  $D_a$  può essere maggiore di  $D_p$ :

$$D_a(\theta_0) = \frac{|F(u_0)|^2}{\frac{\pi}{\beta d} \|\underline{a}\|^2 + \frac{1}{2\beta d} \int_{\text{LobiLaterali}} |F(u)|^2 du} \leq \frac{\|\underline{a}\|^2 N}{\frac{\pi}{\beta d} \|\underline{a}\|^2 + \frac{1}{2\beta d} \frac{\|\underline{a}\|^2}{\|\underline{a}\|^2} \int_{\text{LobiLaterali}} |F(u)|^2 du} \leq \frac{N}{\frac{\pi}{\beta d} + \frac{1}{2\beta d \|\underline{a}\|^2} \int_{\text{LobiLaterali}} |F(u)|^2 du} \leq \frac{N\beta d}{\pi}$$

dove nella precedente si sono utilizzate le seguenti eguaglianze/diseguaglianze:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du = \|\underline{a}\|^2 \rightarrow \frac{1}{2\beta d} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du = \frac{\pi}{\beta d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du = \frac{\pi}{\beta d} \|\underline{a}\|^2$$

$$|F(u)|^2 = F(u) \cdot (F(u))^* = \left| \sum_n a_n e^{jnu} \right|^2 = \sum_n (a_n \cdot a_n^*) \cdot (e^{jnu} \cdot e^{-jnu}) \leq \|\underline{a}\|^2 \cdot N$$

essendo  $F(u)$  una funzione complessa, e quindi il suo modulo quadro è dato dal prodotto fra  $F(u)$  ed il suo complesso coniugato  $(F(u))^*$ .

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

L'ultima disuguaglianza è stata ottenuta applicando la disuguaglianza di Schwartz al prodotto (che può essere visto come un prodotto scalare di componenti) fra i coefficienti delle eccitazioni  $a_n$  e gli esponenziali  $e^{jnu}$ .

Per cui per spaziature maggiori di  $\lambda/2$ ,  $D_a$  ha un massimo maggiore di  $N$  (poiché l'allineamento è più lungo, e quindi il lobo centrale è più stretto) ed ho tale massimo per un array uniforme.

Per spaziature minori di  $\lambda/2$ , l'integrale in  $D_a$  è fatto solo su un pezzo del periodo. Se facessi in modo che tale integrale fosse piccolo nel visibile ed enorme nell'invisibile, otterrei una  $D_a$  molto grande (Array Superdirettivi).

La grandezza  $D_a$  è strettamente collegata alla direttività (26) dell'allineamento, e anzi ne è spesso una ottima approssimazione, soprattutto per array grandi e nella zona del lobo centrale.

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Infatti, poichè nella (25) la funzione  $F(\theta)$  ha un massimo molto pronunciato in  $\theta_M$ , mentre  $\underline{h}$  è una funzione molto più lentamente variabile, possiamo approssimare quest'ultima col suo valore per  $\theta=\theta_M$  ottenendo:

$$P_i = \frac{1}{2} |I_A|^2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int |\underline{h}(\mathcal{G}, \varphi)|^2 |F(\mathcal{G})|^2 d\Omega \cong \frac{1}{2} |I_A|^2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\mathcal{G})|^2 \cos \mathcal{G} d\mathcal{G} \right]$$

e quindi esprimere la resistenza di irradiazione come prodotto tra un contributo di singolo elemento,

$$R_{ei} = 2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi$$

che possiamo chiamare resistenza equivalente di irradiazione, e un contributo dovuto alla interferenza tra le antenne, ovvero al fattore di array:

$$R_{irr} \cong \underbrace{\left[ \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi \right]}_{\text{Contributo ad } R_{irr} \text{ dovuto al singolo elemento}} \underbrace{\left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\mathcal{G})|^2 \cos \mathcal{G} d\mathcal{G} \right]}_{\text{Contributo ad } R_{irr} \text{ dovuto all'interferenza fra le antenne}} = R_{ei} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\mathcal{G})|^2 \cos \mathcal{G} d\mathcal{G} \quad (31)$$



# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

La potenza irradiata dall'allineamento può quindi essere espressa mediante la semplice relazione :

$$P_i \cong \frac{1}{2} |I_A|^2 \frac{\zeta}{4\lambda^2} \int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\mathcal{G})|^2 \cos \mathcal{G} d\mathcal{G} \right] = \frac{1}{2} |I_A|^2 R_{irr}$$

Di conseguenza la direttività (26) diventa:

$$D(\mathcal{G}_0, \varphi_0) = \frac{\frac{1}{2} |I_A|^2 R_{ei} \frac{|\underline{h}(\mathcal{G}_0, \varphi_0)|^2}{2 \int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi} |F(\mathcal{G}_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} |I_A|^2 R_{ei} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\mathcal{G})|^2 \cos \mathcal{G} d\mathcal{G}} = \frac{2\pi |\underline{h}(\mathcal{G}_0, \varphi_0)|^2}{\int_0^{2\pi} |\underline{h}(\mathcal{G}_M, \varphi)|^2 d\varphi} D_a(\mathcal{G}_0) \quad (32)$$

e quindi  $D_a(\theta_M)$  risulta una ottima approssimazione della direttività massima dell'array, e soprattutto, poichè il rapporto tra i due dipende solo dal fattore di elemento, la massimizzazione di  $D_a$ , più semplice, equivale sostanzialmente a quella della direttività rispetto alle eccitazioni.

# Array di Antenne

## DIRETTIVITA' E GUADAGNO DI UN ARRAY

Analogamente, per quanto riguarda il guadagno, se ogni antenna ha una resistenza di dissipazione  $R_d$ , la potenza totale dissipata vale:

$$P_d = \sum_n \frac{1}{2} R_d |I_A a_n|^2 = \frac{1}{2} |I_A|^2 \left( R_d \sum_n |a_n|^2 \right)$$

e quindi, sostituendo nella espressione del guadagno:

$$G(\mathcal{G}_0, \varphi_0) = \eta D(\mathcal{G}_0, \varphi_0) = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_d \sum_n |a_n|^2} D(\mathcal{G}_0, \varphi_0) \quad (33)$$

In particolare per il guadagno massimo si ha:

$$G_M \cong \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_d \sum_n |a_n|^2} D_a(\mathcal{G}_M) \quad (34)$$

# Array di Antenne

## OTTIMIZZAZIONE DI UN ARRAY -- ARRAY SUPERDIRETTIVO

Vediamo ora di determinare la distribuzione ottimale di eccitazioni, ovvero quella che massimizza la direttività dell'array.

Se  $d=\lambda/2$ , allora le due definizioni di  $D_p$  e  $D_a$  coincidono.

In questo caso il massimo di direttività del fattore di allineamento  $D_a$  coincide col massimo di  $D_p$  e si può dimostrare che tale massimo si ottiene per distribuzioni di eccitazioni uniformi.

Quindi l'array uniforme non è solo quello più semplice, ma anche quello che garantisce il massimo guadagno sul periodo: per un array uniforme la direttività  $D_p$  è massima e vale  $N$ :

$$\max D_a \equiv \max D_p = N = \frac{Nd}{\lambda/2} = \frac{2L}{\lambda}$$

# Array di Antenne

## OTTIMIZZAZIONE DI UN ARRAY -- ARRAY SUPERDIRETTIVO

Per spaziature maggiori,  $d > \lambda/2$ , nell'integrale a denominatore della (29) le zone laterali del periodo sono contenute due volte.

Tuttavia, dal punto di vista qualitativo, non vi sono differenze rispetto al caso di  $d = \lambda/2$ , almeno finchè non intervengano grating lobes.

Si dimostra che il massimo di  $D_a$  si ha, almeno approssimativamente, ancora per distribuzione uniforme, e vale

$$D_a(\vartheta_0) \cong N \frac{\beta d}{\pi} = \frac{2L}{\lambda}$$

e, dato che  $\beta d$  è in questo caso maggiore di  $\pi$ , tale valore di direttività è maggiore di  $N$  (infatti l'array è più lungo, più grande, quindi ha una maggiore direttività rispetto al caso  $d = \lambda/2$ ).

# Array di Antenne

## OTTIMIZZAZIONE DI UN ARRAY -- ARRAY SUPERDIRETTIVO

Se invece la spaziatura è minore di  $\lambda/2$ ,  $d < \lambda/2$ , la zona del visibile è inferiore al periodo.

Pertanto l'integrale a denominatore della (29) può risultare anche molto inferiore al valore che assume per  $d = \lambda/2$ .

In tal caso risulta possibile avere delle direttività superiori a  $2L/\lambda$ .

Tali array vengono detti superdirettivi.

Però, più diminuisce la spaziatura e più le eccitazioni dell'array che forniscono la massima direttività tendono a diventare grandi.

Quindi la direttività può aumentare, anche di molto, ma in corrispondenza aumenteranno anche le correnti, e quindi aumenteranno le perdite ed il guadagno crollerà.

# Array di Antenne

## OTTIMIZZAZIONE DI UN ARRAY -- ARRAY SUPERDIRETTIVO

Inoltre anche la sensibilità agli errori di realizzazione è proporzionale al modulo quadro delle eccitazioni, e quindi questo fatto rende gli array superdirettivi praticamente irrealizzabili.

L'ultimo limite degli array superdirettivi è la banda passante molto stretta; infatti la banda è inversamente proporzionale al fattore di merito  $B \propto 1/Q$ , dove  $Q$  è anche esso proporzionale al modulo quadro delle eccitazioni, ed è quindi molto grande, di conseguenza la banda dell'array è piccola.

# Array di Antenne

## OTTIMIZZAZIONE DI UN ARRAY -- ARRAY SUPERDIRETTIVO

Riassumendo, quindi, si può dire che per spaziature minori di  $\lambda/2$  il valore ottimo di  $D_a$  può essere anche molto più grande del valore corrispondente ad una distribuzione uniforme, che è ancora molto prossima a  $2L/\lambda$ .

Tuttavia la norma della corrispondente distribuzione risulta molto grande e questo provoca:

- notevole riduzione del guadagno, anche per valori relativamente piccoli di  $R_d$
- elevatissima sensibilità agli errori realizzativi
- elevatissimo fattore di merito e quindi ridottissima banda passante

# Array di Antenne

## ARRAY -- ARRAY A FASCIO SAGOMATO

Finora abbiamo considerato allineamenti a fascio sottile, ai quali è richiesto di irradiare essenzialmente in una data direzione, con una elevata direttività.

Spesso è necessario progettare allineamenti che devono irradiare particolari forme di fascio nello spazio; tali array vengono detti array a fascio sagomato.

Si pensi ad esempio ad una antenna per diffusione circolare, cui è richiesto di irradiare lo stesso campo su tutto il bacino di utenza (una città, una regione, ecc...) e di non irradiare nulla sui bacini limitrofi (per evitare interferenze).

Il problema può porsi in questi termini: data una certa funzione  $F(u)$  sul periodo, o  $F(\theta)$  sul visibile, voglio trovare l'insieme delle eccitazioni che mi realizzano una tale distribuzione (di solito si lavora solo sul modulo di  $F$ ).

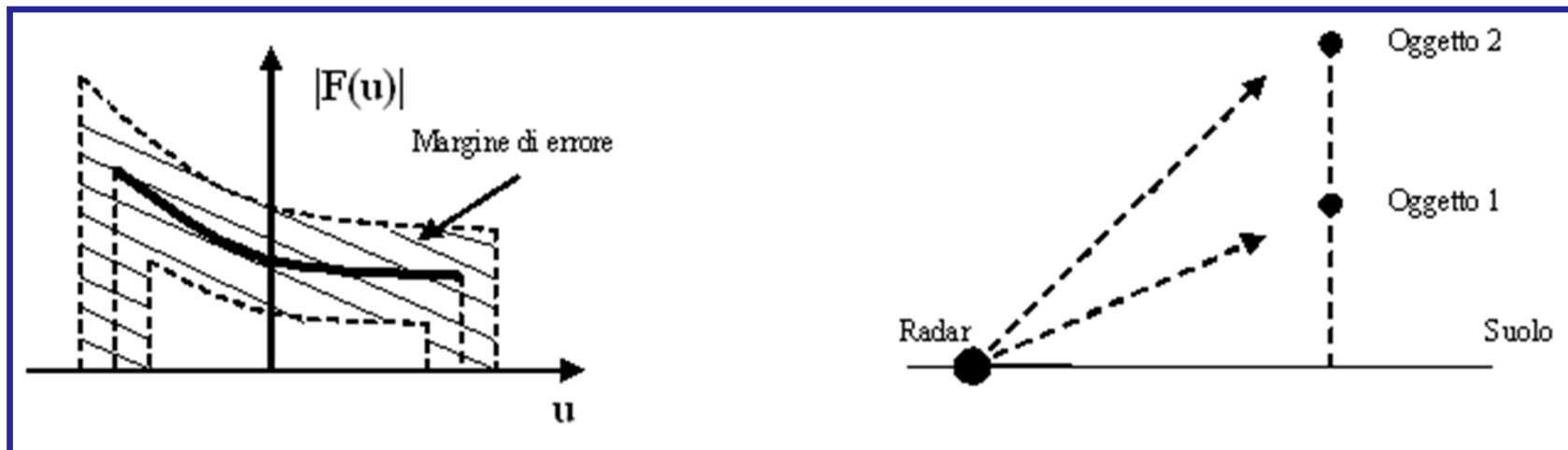


# Array di Antenne

## ARRAY -- ARRAY A FASCIO SAGOMATO

Se lavoro sul periodo, ossia sulla  $F(u)$ , non ho problemi a trovare le eccitazioni, ma se lavoro nel visibile con  $d < \lambda/2$ , e quindi sulla  $F(\theta)$ , potrei ottenere eccitazioni enormi (come si è visto in precedenza), quindi in tal caso devo imporre dei vincoli che mi limitino il modulo delle eccitazioni.

Ad esempio potrei voler sintetizzare un fascio irradiato (con un certo margine di errore) del tipo:



Tale curva è una cosecante quadra, utilizzata per i radar; infatti con questo tipo di fascio un oggetto che si trova ad una certa distanza al suolo dal trasmettitore rimanda la stessa eco a prescindere dalla quota.

# Array di Antenne

## ARRAY -- ARRAY A FASCIO SAGOMATO

Se lavoro In genere l'andamento richiesto, se la  $F(u)$  è specificata solo in modulo, non può essere ottenuto con un numero finito di antenne, ed il problema può essere posto come ricerca delle eccitazioni che minimizzino la distanza :

$$\left\| F_{voluto}(u) - \sum_{n=-N}^N a_n e^{jnu} \right\|^2$$

tra il fattore di array voluto e quello ottenuto.

Si noti che se di  $F(u)$  fosse specificata anche la fase, allora il problema sarebbe di immediata soluzione, in quanto in tal caso dovrei avere:

$$F_{voluto}(u) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{jnu}$$

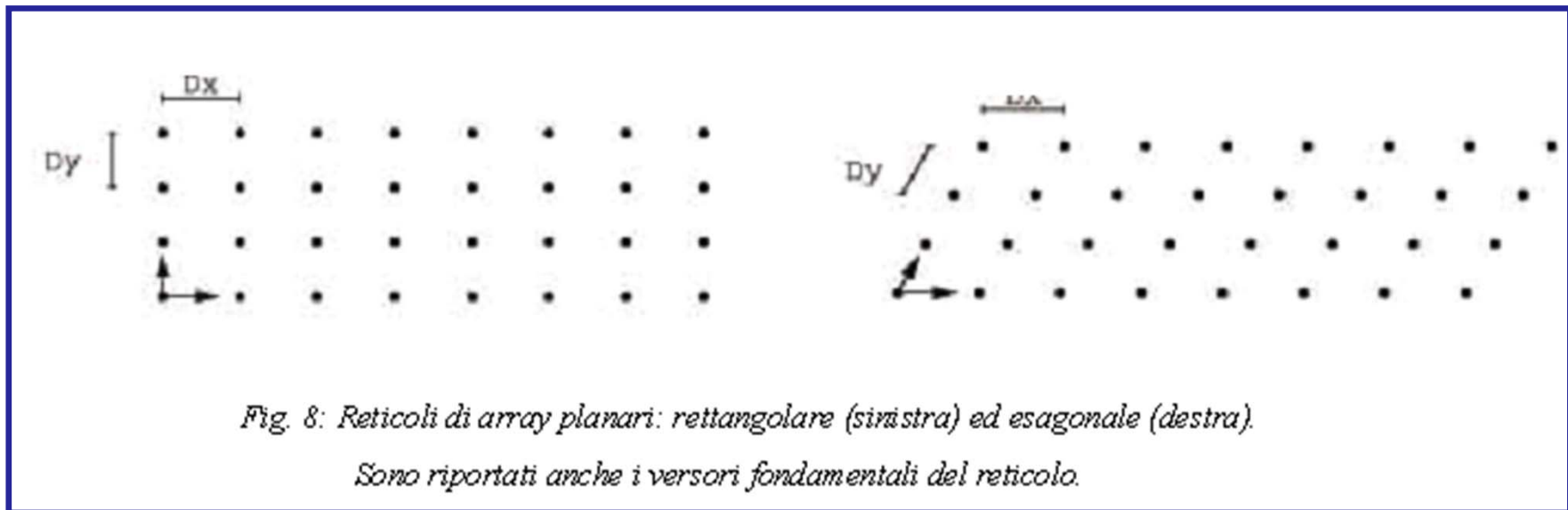
e di conseguenza gli  $a_n$  sarebbero i primi  $2N+1$  coefficienti di Fourier della  $F(u)$  voluta.

# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Gli array planari (ad esempio quelli usati come sensori per telerilevamento) sono costituiti da  $M \times N$  antenne disposte su di un reticolo regolare, costituito da  $M$  righe ed  $N$  colonne.

Il reticolo, di solito, può essere rettangolare oppure esagonale ma può ovviamente in generale avere forma qualunque.



# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Indicati con  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{\eta}$  i due versori fondamentali del reticolo, la posizione della antenna (n,m) è  $nD_x\underline{\xi} + mD_y\underline{\eta}$ .

Il campo di tale allineamento planare vale:

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} e^{j\beta(nD_x\underline{\xi} \cdot \underline{i}_r + mD_y\underline{\eta} \cdot \underline{i}_r)} \quad (53)$$

dove  $\underline{i}_r$  individua la direzione del punto campo (all' infinito).

Tale versore vale, in coordinate sferiche:

$$\underline{i}_r = \cos \vartheta \cos \varphi \underline{i}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \underline{i}_y + \sin \vartheta \underline{i}_z$$

dove  $\theta, \varphi$  sono gli angoli di un sistema di riferimento sferico standard.

# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Per distribuzioni di apertura separabili

$$a_{nm} = A_n \cdot B_m$$

il fattore di array (53) si fattorizza nel prodotto di due fattori di array lineari:

$$F(u, v) = F_A(u) F_B(v) = \sum_n A_n e^{jnu} \sum_m B_m e^{jmv} \quad (54)$$

in cui

$$u = \beta D_x \underline{\xi} \cdot \underline{i}_r \quad v = \beta D_y \underline{\eta} \cdot \underline{i}_r \quad (55)$$

Limitandoci per semplicità al solo caso di reticolo rettangolare, e supponendo che l' array sia disposto sul piano xy, allora la (55) diventa

$$u = \beta D_x \cos \vartheta \cos \varphi \quad v = \beta D_y \cos \vartheta \sin \varphi$$

# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Le considerazioni fatte per array lineari possono quindi essere utilizzate anche in questo caso.

In particolare, è possibile avere un array a fascio scandito se si dà una opportuna progressione di fase alle eccitazioni delle antenne.

Una progressione solo in direzione  $\xi$ , o solo in direzione  $\eta$  produrrà una scansione nella medesima direzione, ma è possibile avere anche scansioni in direzioni diverse, provvedendo a fornire una progressione di fase in entrambe le direzioni.

Le distribuzioni utilizzate negli array planari per telerilevamento sono in genere non uniformi, per ridurre il livello dei lobi laterali.

Tali distribuzioni, però, tendono anche a ridurre leggermente il guadagno e ad allargare quindi il fascio della antenna.

# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Tuttavia la differenza di guadagno e larghezza di fascio tra un array uniforme e uno con distribuzione variabile è abbastanza piccola.

Possiamo quindi trascurarla in questa breve trattazione, calcolando tali parametri per un array uniforme.

Il diagramma di irradiazione (33) di un array planare con eccitazione uniforme si ricava da (7) come

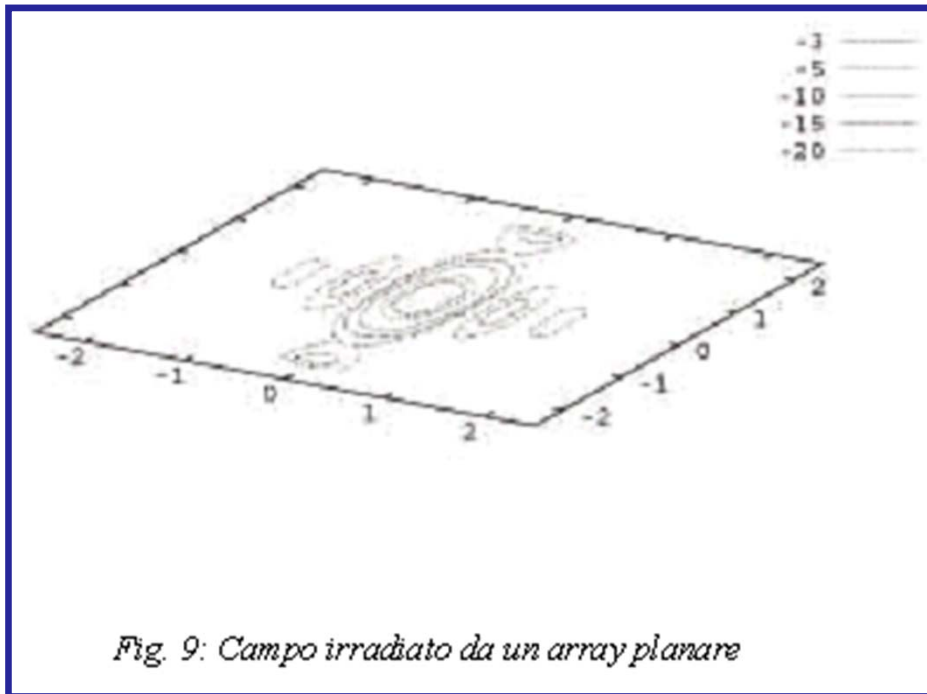
$$F(\vartheta, \varphi) = \frac{\sin\left[\frac{N}{2} \beta D_x \cos \vartheta \cos \varphi\right] \sin\left[\frac{M}{2} \beta D_y \cos \vartheta \sin \varphi\right]}{\sin\left[\frac{1}{2} \beta D_x \cos \vartheta \cos \varphi\right] \sin\left[\frac{1}{2} \beta D_y \cos \vartheta \sin \varphi\right]} \quad (57)$$

supponendo il fascio centrato (ci limitiamo ad array di tipo Broadside).

# Array di Antenne

## ARRAY PLANARI

Come si vede dalla figura 9, la zona illuminata ha una forma ellittica, con una simmetria rispetto a due assi ortogonali. I due piani che corrispondono (nello spazio) a tali assi di simmetria sono detti piani principali dell'array.



*Fig. 9: Campo irradiato da un array planare*

Le larghezze di fascio tra gli zeri, nei due piani principali, sono rispettivamente

$$BW_{\pi x} = \frac{2\lambda}{ND_x} \quad BW_{\pi y} = \frac{2\lambda}{MD_y}$$

per cui il diagramma di irradiazione è più stretto nella direzione in cui l'array è più largo.

Allo stesso modo possono essere calcolate anche le larghezze di fascio a 3 dB:

$$BW_{3x} = \frac{1.325\lambda}{ND_x} \quad BW_{3y} = \frac{1.325\lambda}{MD_y}$$

e, a partire da queste, la direttività approssimata dell'array.